

Cap. 8 O problema de dois corpos com força central (conservativa)

Exemplos: estrela binária, planeta orbitando o sol, Terra-Lua, próton-elétron, átomos em molécula diatômica.

- natureza da aproximação envolvida: o tratamento nestes termos é um bom começo.

Muitas das ideias aqui apresentadas serão úteis também no problema quântico similar - atenção, por exemplo, ao conceito de massa reduzida.

8.1. Estabelecimento do problema

Sejam 2 objetos isolados, de massas m_1 e m_2 , na aproximação de partícula, com posições $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ em um referencial inercial. As forças de interação $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$ são conservativas e centrais $\Rightarrow$ são deriváveis de uma (função) energia potencial $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$.

Exemplo: corpos astronômicos

$$|\vec{F}_{12}| = \frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \Rightarrow U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = - \frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$\text{átomo de H: } U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = - \frac{ke^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

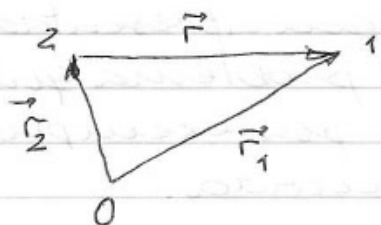
Nos exemplos, $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ - não é acidente: sistema isolado é invariante por translação e, para que

U o seja, só pode depender da diferença de posições (posição relativa)

Além disto: já vimos que se uma força conservativa é central, U tem que ser independente da direção de $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

$$\Rightarrow U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

Para tomar partido disto, defina $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$: posição relativa



$$, r = |\vec{r}| \Rightarrow U = U(r)$$

Podemos agora formular o problema matemático que queremos resolver: quais os possíveis movimentos de 2 corpos com Lagrangeana

$$d = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 - U(r)$$

8.2 O CM, coordenadas relativas e a massa reduzida.

Nossa 1ª tarefa é escolher as coordenadas generalizadas a usar. A melhor escolha é $\vec{r}$ e $\vec{R}$, a posição do centro de massa (CM):

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}$$

(relembra onde fica o CM de 2 partículas). Já sabemos que $\vec{p} = M\dot{\vec{R}}$ (interpretação) é conservado $\Rightarrow \dot{\vec{R}}$ é constante, e

define um referencial inercial especial, o referencial do CM.

Vamos escrever $\mathcal{L}$ em termos das coordenadas generalizadas escolhidas.

$$\vec{R} = \frac{m_1}{M} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{r}_2$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left[m_1 \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 + m_2 \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\vec{r}}^2 \right] \end{aligned}$$

Definimos a massa reduzida μ :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \left(\text{e } \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

Propriedades: $\mu < m_1, m_2$

se $m_1 \ll m_2 \Rightarrow \mu \approx m_1$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2$$

(interpretação: 2 partículas fictícias), e

$$\mathcal{L} = T - U = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2}_{\mathcal{L}_{\text{cm}}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(r) \right)}_{\mathcal{L}_{\text{rel}}}$$

$\mathcal{L}$ é separável $\Rightarrow$ 2 problemas distintos e independentes.

8.4.3 As equações de movimento

- eq. para $\vec{R}$: (3 equações)

$$M\ddot{\vec{R}} = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = \text{constante}$$

• consequência direta da conservação do momento total

• $\vec{R}$ é coordenada ignorável

• $\mathcal{L}_{\text{CM}}$ tem a forma de uma Lagrangeana de partícula livre; pela 1ª lei de Newton, $\ddot{\vec{R}} = 0$ é constante

- eq. para $\vec{r}$: $\mathcal{L}_{\text{rel}}$ tem a forma de $\mathcal{L}$ para partícula de massa μ sujeita à energia potencial $U(r)$:

$$\Rightarrow \mu \ddot{\vec{r}} = -\nabla U(r)$$

O referencial do CM

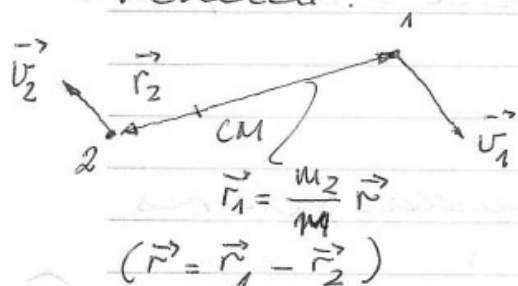
O problema se torna ainda + simples se escolhermos bem o referencial. Como $\ddot{\vec{R}} = 0$ é constante, podemos escolher um referencial no qual o CM está em repouso e no qual o momento total seja nulo: é o referencial do CM, no qual $\ddot{\vec{R}} = 0$ e a parcela da Lagrangeana que se refere ao movimento do CM é identicamente nula ($\mathcal{L}_{\text{CM}} = 0$). Neste referencial

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{rel}} = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(r)$$

e o problema se reduz a um de uma partícula. Esta simplificação ilustra o significado da terminologia "coordenada

denada ignorável": o movimento associado a ela pode ser ignorado.

Como é o movimento visto deste referencial?



As 2 partículas se movem, e seus momentos são iguais e opostos. Se $m_2 \gg m_1$ (o que é frequentemente verdade), o CM está ~~muito~~ perto de m_2 e

esta partícula tem velocidade pequena; além disso, $\vec{r}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{r} \approx \vec{r}$.

Conservação do momento angular

Já sabemos que o momento angular total do sistema (isolado) de 2 partículas é conservado. Esta conservação toma forma especialmente simples no referencial do CM.

Em qualquer referencial,

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2$$

No referencial CM, ($\vec{R} = 0$),

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad \text{e} \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{r}$$

$$\text{Neste referencial, } \vec{L} = \frac{m_1 m_2}{M^2} (m_2 \vec{r} \times \dot{\vec{r}} + m_1 \vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

$\Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}$, o mesmo que o de 1 partícula de massa μ e posição $\vec{r}$. Como $\vec{L}$ é conservado, $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ é constan-

que podemos escolher como o plano xy ,
 te - como sua direção é constante, o
 plano formado por $\vec{r}$ e $\vec{\dot{r}}$ é fixo $\Rightarrow$ no
 referencial CM, o movimento se dá num
 plano fixo, e o problema de 2 corpos sob
 força central conservativa é um proble-
 ma bidimensional.

As 2 eq. de movimento

Escolhamos coordenadas polares
 bidimensionais r e ϕ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - U(r)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \phi \text{ é ignorável, e}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \dot{\phi} = \ell \text{ (constante),}$$

(estritamente: $\ell_z, \dots$)

que é apenas a expressão da conserva-
 ção do momento angular.

A eq. radial:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = - \frac{dU}{dr} + \mu r \dot{\phi}^2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \mu \ddot{r}$$

(se movermos o termo centrípeta para
 a direita resulta a componente ra-
 dial da eq. Newton, $\vec{F} = \mu \vec{a}$)

8.4. O problema unidimensional
 equivalente.

Da eq. em ϕ resulta

$$\dot{\phi} = \frac{\ell}{\mu r^2}, \text{ que podemos}$$

usar para eliminar

ϕ da eq. radial:

$$\mu \ddot{r} = - \frac{dU}{dr} + \underbrace{\mu r \dot{\phi}^2}_{F_{cf}} = - \frac{dU}{dr} + \frac{\ell^2}{\mu r^3}$$

eq. para 1 partícula em 1D, sujeita à ação da força $-\frac{dU}{dr}$ e de uma força centrífuga fictícia $F_{cf} = \frac{L^2}{\mu r^3}$, que pode ser expressa como a derivada de uma energia potencial centrífuga:

$$F_{cf} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{L^2}{2\mu r^2} \right) = -\frac{d}{dr} U_{cf}$$

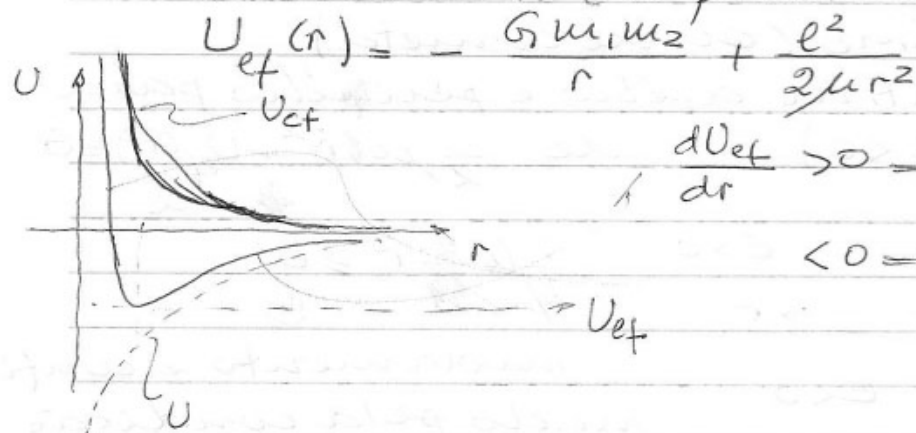
$U_{cf} = \frac{L^2}{2\mu r^2}$, que nos permite reescrever a eq. radial na forma

$$\mu \ddot{r} = -\frac{d}{dr} U_{ef}(r), \quad U_{ef}(r) = U(r) + U_{cf}(r),$$

$$U_{ef}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}, \quad \text{que nos}$$

permite usar todo o formalismo desenvolvido anteriormente para sistemas conservativos unidimensionais.

Exemplo 1: energia potencial efetiva de um cometa. (o problema de Kepler)



$$\frac{dU_{ef}}{dr} > 0 \Rightarrow \ddot{r} < 0 \quad \text{"atracção"}$$

$$< 0 \Rightarrow \ddot{r} > 0 \quad \text{"repulsão"}$$

Conservação da energia

Da eq. radial,

$$\mu \ddot{r} = - \frac{d}{dr} U_{ef}(r)$$

$$\mu \ddot{r} \dot{r} = - \frac{d}{dr} U_{ef}(r) \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu \dot{r}^2}{2} + U_{ef}(r) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U_{ef}(r) = \text{constante},$$

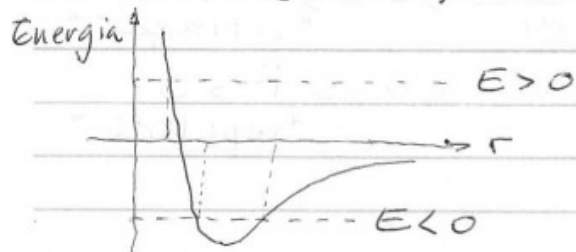
que é, de fato, a energia total:

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U_{ef} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\phi}^2 + U(r) = E$$

Portanto, a energia total pode ser entendida como a soma da energia cinética associada ao movimento radial (1D) com a energia potencial efetiva (também 1D), que inclui a energia potencial "de verdade" U e a energia cinética $\frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\phi}^2$ associada ao movimento angular. — 20/05/09 —

Exemplo 2: análise ^{energética} do movimento planetário (ou de cometa)

Encontrar afélio e perifélio para $E > 0$ ($E < 0$): de $\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U_{ef}(r) = E$



$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \geq 0$$

movimento é confinado pela condição

$$E - U_{ef}(r) \geq 0 \Rightarrow E \geq U_{ef}(r)$$

- se $E > 0 \Rightarrow U_{ef}(r_{min}) = E$

Em $r = r_{min}$, $\dot{r} = 0$

Órbita é ilimitada (analise o movimento, partindo de $r \gg r_{min}$ com $\dot{r} < 0$)

- se $E < 0 \Rightarrow U_{ef}(r_{min}) = U_{ef}(r_{max}) = E$:

r_{min} e r_{max} são pontos de retorno, e o planeta (cometa) está capturado: órbita é limitada.

Se $E = \min U_{ef}(r)$: órbita circular
($r_{min} = r_{max}$)

Consideramos, no exemplo, força que cai com o quadrado da distância, mas as conclusões são idênticas (qualitativamente) em muitos outros casos (sempre que U_{ef} tiver a forma mostrada), como em moléculas diatômicas, por exemplo.

Ao considerar o movimento radial no problema de 2 corpos, não podemos nos esquecer inteiramente do movimento angular. Vimos que $\dot{\phi} = \frac{L}{\mu r^2}$ e ϕ muda continuamente - e $\dot{\phi}$ tem sempre o mesmo sinal, logo ϕ sempre aumenta ou sempre diminui. Por exemplo, quando um cometa com $E > 0$ se aproxima do Sol, ϕ muda a uma taxa que aumenta quando r diminui; quando ele se afasta, a taxa de varia-

ção de ϕ diminui (r aumenta). Para uma força que varia com o inverso do quadrado da distância, a órbita é uma hipérbole. Em outros casos, a curva é diferente, mas as órbitas ilimitadas são qualitativamente semelhantes.

Para as órbitas limitadas ($E < 0$), vimos que r oscila entre 2 valores extremos $r_{\min}$ e $r_{\max}$, enquanto ϕ aumenta & (se a órbita é percorrida no sentido trigonométrico, diminui, caso contrário). No caso da força $\propto \frac{1}{r^2}$, veremos que os períodos dos movimentos radial e angular coincidem, e o movimento se repete a cada revolução - as órbitas são fechadas (veremos que são elipses). Para a maioria das outras forças, estes períodos são diferentes, e a órbita não é fechada.

8.5 Equação da órbita

A eq. radial ($\mu \ddot{r} = -\frac{d}{dr} U_{\text{ef}}(r)$) determina $r = r(t)$; mas para muitas finalidades gostaríamos de ter $r = r(\phi)$, que nos dá diretamente a forma da órbita.

Para isso, podemos reescrever a eq. radial como uma eq. diferencial para r em termos de ϕ - usando 2 truques:

- fazer a substituição $u = \frac{1}{r}$ (ou $r = \frac{1}{u}$);
- usar a regra da cadeia para

resolver o operador diferencial $\frac{d}{dt}$ em termos de $\frac{d}{d\phi}$: $\frac{d}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \frac{d}{d\phi} = \dot{\phi} \frac{d}{d\phi} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{d}{d\phi}$

$$= \frac{l u^2}{\mu} \frac{d}{d\phi}$$

Então:

$$\dot{r} = \frac{d}{dt}(r) = \frac{l u^2}{\mu} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{u} \right) = - \frac{l}{\mu} \frac{du}{d\phi} ;$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{l u^2}{\mu} \frac{d}{d\phi} \left(- \frac{l}{\mu} \frac{du}{d\phi} \right) = - \frac{l^2 u^2}{\mu^2} \frac{d^2 u}{d\phi^2} ;$$

e a eq. radial fica

$$- \frac{l^2 u^2}{\mu^2} \frac{d^2 u}{d\phi^2} = F + \frac{l^2 u^3}{\mu} , \text{ ou}$$

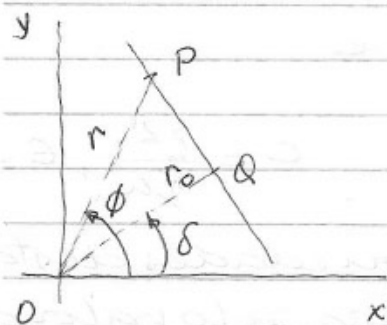
$$u''(\phi) = -u(\phi) - \frac{\mu}{l^2 u^2(\phi)} F$$

Exemplo: eq. radial para a partícula Livre (uma das maneiras + difíceis de mostrar que a trajetória é uma linha reta...)

$$F=0 \Rightarrow u''(\phi) = -u(\phi) \quad (\text{MKS})$$

$$u(\phi) = A \cos(\phi - \delta) \text{ é a solução geral}$$

$$r(\phi) = \frac{1}{u(\phi)} = \frac{1}{A} \frac{1}{\cos(\phi - \delta)} = \frac{r_0}{\cos(\phi - \delta)} ,$$



que é a eq. polar de uma linha reta que passa por $Q(r_0, \delta)$ e é ortogonal a OQ :

$$\frac{r_0}{r} = \cos(\phi - \delta) \Rightarrow r = \frac{r_0}{\cos(\phi - \delta)}$$

8.6. As órbitas de Kepler

Problema de Kepler: encontrar as órbitas possíveis para objeto sujeito a força $F \propto \frac{1}{r^2}$; para poder usar com facilidade o resultado nos casos gravitacional e coulombiano, escrevo

$$F(r) = -\frac{\gamma}{r^2} = -\gamma u^2 \quad (\gamma = GM\mu, \text{ e.g.})$$

$$\Rightarrow u''(\phi) = -u(\phi) + \frac{\gamma\mu}{\ell^2}$$

(o último termo é constante porque $F \propto \frac{1}{r^2}$!) - e a eq. é fácil de resolver: defina $w(\phi) = u(\phi) - \frac{\gamma\mu}{\ell^2}$

$w''(\phi) = -w(\phi) \Rightarrow w(\phi) = A \cos(\phi - \delta)$, onde $A > 0$ e δ pode ser escolhida nula por uma escolha apropriada da direção $\phi = 0$ (ou então, defina $\tilde{\phi} = \phi - \delta$).

A solução geral para u é

$$u(\phi) = \frac{\gamma\mu}{\ell^2} + A \cos \phi = \frac{\gamma\mu}{\ell^2} (1 + \epsilon \cos \phi).$$

$$\epsilon = \frac{A\ell^2}{\gamma\mu}. \text{ Como } u = \frac{1}{r}, \quad \frac{\gamma\mu}{\ell^2} \text{ tem dimen-}$$

ção de [comprimento] $^{-1}$ $\rightarrow$ introduzimos comprimento $c = \frac{\ell^2}{\gamma\mu}$, e

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon \cos \phi}, \quad c = \frac{\ell^2}{\gamma\mu}, \quad \epsilon = \frac{A\ell^2}{\gamma\mu} = A c$$

Vamos explorar as propriedades desta solução, que está controlada pelo valor da constante positiva ϵ ainda indeterminada.

e que é muito diferente se $\epsilon < 1$ ou se $\epsilon \geq 1$.

Órbitas limitadas

Se $\epsilon < 1$, o denominador nunca se anula e a órbita é limitada. Se $\epsilon \geq 1$, ele se anula para algum valor de ϕ (ϕ_{as}), e $r(\phi) \rightarrow \infty$ como $\phi \rightarrow \phi_{as}$.

O valor $\epsilon = 1$ é a fronteira entre órbitas limitadas e ilimitadas - veremos que corresponde à fronteira entre $E < 0$ e $E \geq 0$.

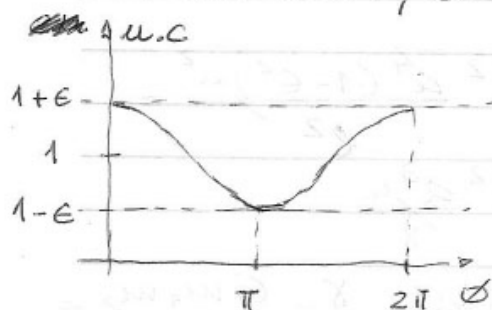
Se $\epsilon < 1$, o denominador oscila

entre os valores $1 \pm \epsilon$, e

$r(\phi)$ oscila entre

$$r_{\min} = \frac{c}{1 + \epsilon} \quad \text{e}$$

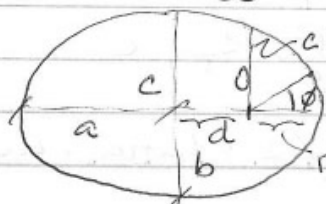
$$r_{\max} = \frac{c}{1 - \epsilon} \quad ,$$



com $r_{\min}$ (perihélio) em $\phi = 0$ e $r_{\max}$ (afélio) em $\phi = \pi$. Como $r(\phi)$ é periódico, com período 2π , $r(2\pi) = r(0)$ e a órbita se fecha após apenas 1 revolução. — 22/05/09 —

Não é difícil reescrever a eq. da órbita em coordenadas cartesianas para obter

$$\frac{(x+d)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a = \frac{c}{1 - \epsilon^2}$$



$$b = \frac{c}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}, \quad d = a\epsilon$$

(eq. da elipse)

A razão $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \epsilon^2} \Rightarrow \epsilon = \frac{a-b}{a}$ é a excentricidade da elipse ($\epsilon = 0 \Rightarrow b = a$ e a elipse torna-se um círculo; $\epsilon \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{b}{a} \rightarrow 0$, e a elipse é fina e alongada);
 $d = a\epsilon$ é a distância focal — e agora vamos de provar a 1ª lei de Kepler!

O período da órbita: a 3ª lei de Kepler
 Da 2ª lei de Kepler,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{c}{2\mu}$$

Como a área da elipse é πab , o período é

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{A}{dA/dt} = \frac{2\pi ab\mu}{c} \\ &= 4\pi^2 \frac{a^2 b^2 \mu^2}{c^2} = 4\pi^2 \frac{a^4 (1 - \epsilon^2) \mu^2}{c^2} = \\ &= 4\pi^2 \frac{a^3 c \mu^2}{c^2} = 4\pi^2 \frac{a^3 \mu}{c} \end{aligned}$$

Para a força gravitacional, $\gamma = G m_1 m_2 =$
 $= G \mu M \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G M} \approx \frac{4\pi^2 a^3}{G M_{\text{sol}}}$

e a lei se aplica também a satélites de um planeta.

Exemplo: período de satélite da Terra em órbita baixa circular

$$\rightarrow r = R_{\text{Terra}}, \text{ e } T^2 = \frac{4\pi^2}{G M_T} R_T^3;$$

$$\text{mas } \frac{G M_T}{R_T^2} = g \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{g} R_T, \text{ e}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g}} \approx 85 \text{ min } (\approx 1 \text{ hora e meia})$$

Relações entre energia e excentricidade
No periélio,

$$U_{\text{ef}}(r_{\text{min}}) = E = -\frac{\gamma}{r_{\text{min}}} + \frac{l^2}{2\mu r_{\text{min}}^2} =$$

$$= \frac{1}{2r_{\text{min}}} \left(\frac{l^2}{\mu r_{\text{min}}} - 2\gamma \right)$$

Mas $r_{\text{min}} = \frac{c}{1+\epsilon}$ e $c = \frac{l^2}{\gamma\mu}$

$$\Rightarrow r_{\text{min}} = \frac{l^2}{\gamma\mu(1+\epsilon)}, \text{ e}$$

$$E = \frac{\gamma\mu(1+\epsilon)}{2l^2} \left(\frac{l^2}{\mu c} (1+\epsilon) - 2\gamma \right) =$$

$$= \frac{\gamma^2\mu}{2l^2} (\epsilon^2 - 1), \text{ válido tanto para órbitas limi-}$$

tadas quanto para ilimitadas. Logo,

$$E < 0 \Rightarrow \epsilon^2 < 1 \Rightarrow \epsilon < 1, \text{ e}$$

$$E > 0 \Rightarrow \epsilon^2 > 1 \Rightarrow \epsilon > 1 \text{ (órbita ilimitada)}$$

Esta equação estabelece uma relação útil entre propriedades mecânicas (E e l) e geométricas (ϵ) e tem interessantes implicações. Por exemplo, para um dado valor (fixo) de l , a órbita de menor energia possível é a órbita circular com $E = 0$ (esta conexão tem uma correspondente em mecânica quântica m)

8.7 Órbitas de Kepler ilimitadas

Vamos analisar a solução geral para a órbita $r(\phi) = \frac{c}{1+\epsilon \cos \phi}$ quando $\epsilon \geq 1$

$$\Rightarrow E \geq 0$$

A fronteira entre órbitas limitadas e ilimitadas ocorre para $\epsilon = 1$ ($E = 0$); neste caso, o denominador da equação da órbita se anula quando $\phi = \pm \pi$, isto é $r(\phi) \rightarrow \infty$ quando $\phi \rightarrow \pm \pi$: a órbita é ilimitada e $r \rightarrow \infty$. Neste caso, a órbita em coordenadas cartesianas é $y^2 = c^2 - 2cx$, equação de uma parábola.

Se $\epsilon > 1$ ($E > 0$) o denominador se anula para $\phi_{\max}$ dado por $\epsilon \cos \phi_{\max} = -1$, e a órbita é confinada angularmente a $(-\phi_{\max}, \phi_{\max})$. Sua forma cartesiana é $\frac{(x-\delta)^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, equação de uma hipérbole.

Sumário das órbitas de Kepler

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon \cos \phi}$$

$$E = \frac{\gamma^2 \mu}{2\ell^2} (\epsilon^2 - 1)$$

excentricidade	energia	órbita
$\epsilon = 0$	$E < 0$	círculo
$0 < \epsilon < 1$	$E < 0$	elipse
$\epsilon = 1$	$E = 0$	parábola
$\epsilon > 1$	$E > 0$	hipérbole

- c : fator de escala que determina o tamanho da órbita (distância quando $\phi = \frac{\pi}{2}$), $c = \frac{\ell^2}{\gamma \mu}$

8.8. Mudanças de órbita (pilotando uma espaçonave)

Se queremos ir a Venus podemos ^{querer} ~~nos~~ transferir de uma órbita circular em torno do Sol (próxima à Terra) para uma elíptica que a leve próxima ao alvo. Algo similar pode levar um satélite da Terra para altitudes + elevadas. A análise das órbitas em torno da Terra é idêntica à das órbitas em torno do Sol - os pontos de menor e maior afastamento são agora chamados de perigeu e apogeu.

Vamos focalizar órbitas limitadas, elípticas:

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + e \cos(\phi - \delta)} \quad \left(\text{vamos ter que manipular } 2, \text{ por isso não podemos nos livrar de } \delta - \text{ não para ambas, pelo menos} \right)$$

Suponha que a espaçonave está numa órbita como essa, com energia E_1 e momento angular ℓ_1 , e parâmetros orbitais c_1 , e_1 e δ_1 . Uma forma comum de mudar de órbita é ligar os motores vigorosamente por um pequeno intervalo de tempo - é uma boa aproximação considerar este procedimento como um impulso que muda a velocidade instantaneamente de um valor conhecido sem mudar o ângulo ϕ_0 . Conhecido o novo valor da velocidade, determinamos

E_2 e e_2 - e deste último o valor de c_2 , e e_2 da relação entre E e e . Finalmente, como a órbita deve ser contínua, $r_1(\phi_0) = r_2(\phi_0)$ leva a

$$\frac{c_1}{1 + e_1 \cos(\phi_0 - \delta_1)} = \frac{c_2}{1 + e_2 \cos(\phi_0 - \delta_2)}, \text{ que determina } \delta_2.$$

O procedimento é apenas braçal. Vamos exemplificá-lo num caso especial importante.

Impulso tangencial no perigeu.

Escolhemos o eixo x de modo a que o perigeu corresponda a $\phi = 0 \Rightarrow \phi_0 = \delta_1 = 0$. Como o impulso é tangencial, $\vec{v}$ mantém a direção perpendicular ao raio (da Terra ao satélite). Portanto, este é também o perigeu (ou apogeu) da nova órbita $\Rightarrow \delta_2 = 0$, e a continuidade da órbita impõe

$$\frac{c_1}{1 + e_1} = \frac{c_2}{1 + e_2}$$

Defino λ por $v_2 = \lambda v_1$ (o fator de empuxo): se $\lambda > 1$, o empuxo foi para a frente e a velocidade do satélite aumentou.

$$\text{No perigeu, } \ell = \mu r v \Rightarrow \ell_2 = \lambda \ell_1$$

$$\text{Como } c \propto \ell^2, \quad c_2 = \lambda^2 c_1$$

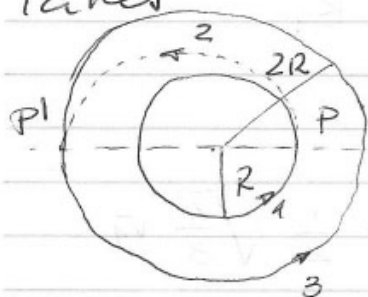
$\Downarrow$

$$\frac{1}{1 + e_1} = \frac{\lambda^2}{1 + e_2} \Rightarrow e_2 = \lambda^2 e_1 + (\lambda^2 - 1)$$

e esta equação contém quase todas as informações interessantes sobre a nova órbita! Por exemplo:

- se $\lambda > 1 \Rightarrow E_2 > E_1$: a nova órbita tem o mesmo perigeu que a antiga mas maior excentricidade $\Rightarrow$ maior apogeu; se fizermos λ grande o suficiente podemos ter $E_2 > 1 \Rightarrow$ órbita hiperbólica e o satélite escapa da atração terrestre
- se $\lambda < 1 \Rightarrow E_2 < E_1$, e o apogeu diminui; se diminuirmos λ , podemos vir a ter $E_2 = 0 \Rightarrow$ nova órbita é circular; para λ ainda menor, teremos $E_2 < 0 \Rightarrow$ perigeu e apogeu inverteram seus papéis.

Exemplo: transferência entre órbitas circulares



Impulsos em P e P' (perigeu e apogeu da órbita 2 de transferência). Quais devem ser λ e λ' ?

$$C_1 = R_1 \text{ e } E_1 = 0 \quad (R_1 = R)$$

$$\Rightarrow C_2 = \lambda^2 R_1 \text{ e } E_2 = \lambda^2 - 1$$

No apogeu da órbita 2, $r = R_3 = 2R$; da equação da órbita,

$$R_3 = \frac{C_2}{1 + E_2 \cos \pi} = \frac{C_2}{1 - E_2} = \frac{\lambda^2 R}{1 - (\lambda^2 - 1)}$$

$$\Rightarrow 2R = \frac{\lambda^2 R}{2 - \lambda^2} \Rightarrow 3\lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1,15$$

O segundo impulso em P^1 (apogeu da órbita 2 $\Rightarrow \phi = \pi$)

$$\Rightarrow \frac{C_2}{1 - \epsilon_2} = \frac{C_3}{1 - \epsilon_3}$$

No apogeu, $\ell = \mu r v \Rightarrow \ell_3 = \lambda' \ell_2$

Como $C \propto \ell^2$, $C_3 = \lambda'^2 C_2$

$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{1 - \epsilon_2} = \frac{\lambda'^2}{1 - \epsilon_3} \Rightarrow 1 - \epsilon_3 = \lambda'^2 (1 - \epsilon_2) \Rightarrow \epsilon_3 = 1 - \lambda'^2 + \lambda'^2 \epsilon_2$$

$$\text{Mas } \epsilon_3 = 0 \text{ e } \epsilon_2 = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda'^2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow \lambda' = \sqrt{2} \approx 1,41$$

Cuidado: o incremento de velocidade não é $\lambda \cdot \lambda'$, porque acontecem em pontos diferentes da órbita. De fato, a velocidade na órbita 3 é menor que na órbita 1.

$$v_2(\text{apo}) \cdot R_3 = v_2(\text{per}) \cdot R_1$$

$$v_3 = \lambda' v_2(\text{apo})$$

$$v_2(\text{per}) = \lambda v_1$$

$\Downarrow$

$$v_3 = \lambda' \cdot \frac{R_1}{R_3} \cdot \lambda v_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} v_1$$

$$v_3 = \frac{v_1}{\sqrt{2}}$$

É fácil mostrar que, para órbitas circulares, $v \propto \sqrt{\frac{1}{R}}$ - e o resultado acima é um caso particular.

- 25/05/09.